

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.042 + 519.6

DOI: 10.52957/2782-1919-2025-6-1-8-20

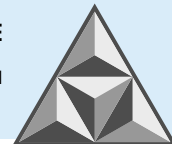
Расчет частот свободных колебаний башен по методам Фаддеева и Крылова

С.А. Тумаков, Г.Н. Голубь

Сергей Анатольевич Тумаков, Григорий Николаевич Голубь*

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Российская Федерация

*sergtum1958@yandex.ru, golubgn@ystu.ru**



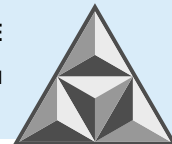
Изучается вопрос динамического расчета частот свободных колебаний для сооружений башенного типа. Предлагается при расчете реальной континуальной системы использовать схему в виде дискретной модели с заменой распределенных масс на сосредоточенные массы. Для решения задачи расчета частот собственных колебаний применены электронные таблицы. Теоретические основы расчета включают описание численных методов раскрытия определителя векового уравнения. Показаны алгоритмы вычислительных операций расчета свободных колебаний систем с конечным числом степеней свободы по методу Д.К. Фаддеева и методу А.Н. Крылова. Разобраны приемы определения корней характеристического уравнения n -степени. Приведены примеры расчета собственных колебаний сооружений башенного типа с пятью и шестью степенями свободы.

Ключевые слова: численные методы, матричные вычисления, частоты свободных колебаний, характеристическое уравнение, электронные таблицы

Для цитирования:

Тумаков С.А., Голубь Г.Н. Расчет свободных колебаний башен по методам Фаддеева и Крылова // Умные композиты в строительстве. 2025. Т. 6, вып. 1. С. 8-20.
URL: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/5863/view>

DOI: 10.52957/2782-1919-2025-6-1-8-20



SCIENTIFIC ARTICLE

DOI: 10.52957/2782-1919-2025-6-1-8-20

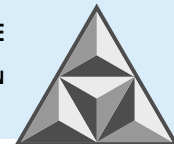
Calculation of free vibration frequencies of towers using Faddeev's and Krylov's methods

S.A. Tumakov, G.N. Golub

Sergey Anatolyevich Tumakov, Grigory Nikolaevich Golub*

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation

*sergtum1958@yandex.ru, golubgn@ystu.ru**



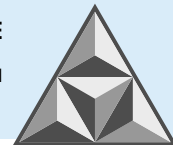
The paper considers the issue of dynamic calculation of free vibration frequencies for tower-type structures. The authors propose to use a scheme in the form of a discrete model with the replacement of distributed masses by concentrated masses when calculating a real continuum system. Spreadsheets were used to solve the problem of calculating natural vibration frequencies. The theoretical basis of the calculation includes a description of numerical methods for solving the determinant of the secular equation. The paper shows algorithms of computational operations for calculating free vibrations of systems with a finite number of freedom degrees using the method by D.K. Faddeev and the method by A.N. Krylov. The approaches to finding the roots of the n -degree characteristic equation are analysed. The paper contains calculation examples of natural vibrations of tower-type structures with five and six degrees of freedom.

Keywords: numerical methods, matrix calculations, free vibration frequencies, characteristic equation, spreadsheets

For citation:

Tumakov S.A., Golub G.N. Calculation of free vibrations frequencies of towers using Faddeev's and Krylov's methods // *Smart Composite in Construction*. 2025. Vol. 6, Iss. 1. P. 8-20
URL: <https://comincon.ru/ru/nauka/issue/5863/view>

DOI: 10.52957/2782-1919-2025-6-1-8-20



ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена вопросу использования численных методов определения частот свободных колебаний систем с конечным числом степеней свободы. При этом коэффициенты характеристических уравнений вычисляются в матричном виде. Частоты свободных колебаний находятся при помощи стандартных функций электронных таблиц.

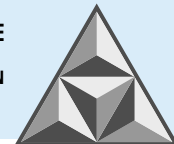
Динамический расчет в настоящее время является обязательной частью расчета зданий и сооружений для определения по СП 20.13330.2016 динамической пульсационной составляющей ветрового воздействия на проектируемое сооружение, зависящей от частот свободных колебаний проектируемого объекта [1, 2]. Кроме этого, для элементов зданий и сооружений, подвергающихся динамическим воздействиям, расчет собственных колебаний позволит разработать конструктивные решения, исключающие возможность возникновения резонансных явлений.

Таким образом, знание частот собственных колебаний конструкций в частности и здания в целом является необходимым и актуальным.

Динамика – раздел человеческих знаний, изучающий движение материальных тел под действием сил, известна примерно с середины XVIII века. Динамика сооружений развивается с 20-х годов XX века. Это специальный раздел строительной механики, в котором исследуются поведение и критерии состояния систем под различными воздействиями, определяются основные закономерности и разрешающие уравнения расчета сооружений на действия динамических нагрузок. Краткий исторический обзор развития динамики сооружений приведен в [3]. Современное состояние и перспективы развития методов расчета конструкций при различных динамических воздействиях освещены в [4-6].

Здания являются системами с распределенными массами. С точки зрения строительной механики для описания колебательных процессов таких систем необходимо бесконечное число геометрических параметров. Поэтому количество степеней свободы для реальных зданий равно бесконечности. Точный динамический расчет систем с бесконечным числом степеней свободы возможен для отдельных простых конфигураций строительных систем. В большинстве случаев расчет континуальной системы заменяется расчетом дискретной модели, например, конечно-элементной. Однако и в этом случае динамический расчет зданий, моделированных системой с большим количеством конечных элементов, может вызвать определенные затруднения и неудобства. Данная проблема называется обобщенной алгебраической проблемой собственных значений высокого порядка, возникающей при применении численных методов к решению задач строительной механики на свободные колебания. Пути решения этой проблемы проанализированы в [7]. Для упрощения динамического расчета используется метод замены распределенных масс сосредоточенными [8, 9]. Анализ расчетов собственных значений частот здания с распределенными массами в конечно-элементной модели и заменяющей расчетной схемы здания в виде консоли с сосредоточенными массами приведен в [10]. Показано, что при выполнении определенных требований по частоте разбивки и количеству заменяющих масс расхождение в результатах расчета незначительны.

Современный расчет зданий и сооружений чаще всего выполняется с использованием пакетов прикладных программ на мощных быстродействующих компьютерах. Это касается многоэтажных зданий, а также зданий, состоящих из большого количества расчетных конструктивных элементов, приближенный расчет которых не может полностью соответствовать их реальному напряженно-деформированному состоянию. Современные



нормы диктуют обязательное условие расчета сооружений с учетом совместной работы с грунтовым основанием, что также требует применения вычислительной техники. Применяемые промышленные программные комплексы реализуют все статические и динамические расчеты. Однако для несложных расчетных систем, предварительных расчетов или в случаях, когда замена реальной модели конструкции дискретной моделью дает достаточную точность вычисления, прибегают к приближенным методам вычислений, которые позволяют находить искомые величины, не прибегая к помощи вычислительных комплексов.

Целью настоящей работы является исследование применения численных методов в электронных таблицах в матричных вычислениях и решениях характеристических уравнений, связанных с решением задачи собственных значений систем с конечным числом степеней свободы.

Актуальность исследования определяется необходимостью выполнения расчетов собственных колебаний систем для оценки пульсационной составляющей ветровой нагрузки на проектируемое сооружение.

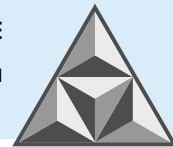
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Исследования проведены при помощи электронных таблиц для персональных компьютеров. Объектом исследования являются функции электронных таблиц применительно к решению задач собственных значений систем с пятью и шестью степенями свободы. Собственные значения найдены численными методами. Коэффициенты определителя векового уравнения определены по правилам строительной механики. Расчет коэффициентов характеристического уравнения сделан в матричной форме по методам Д.К. Фаддеева и А.Н. Крылова [11]. Проведенные исследования закрывают вопрос определения частот свободных колебаний систем с пятью и шестью степенями свободы с помощью электронных таблиц.

Считается, что прямой метод поиска коэффициентов характеристического уравнения и частот свободных колебаний подходит только для систем с небольшим количеством степеней свободы, так как с увеличением степеней свободы, а следовательно, и размерности матрицы векового уравнения сложность задачи очень быстро растет и требует привлечения вычислительной техники. Однако и в этом случае коэффициенты характеристического уравнения для матриц размерности 5×5 и выше определяются с погрешностями, вызываемыми ошибками округления. Сама задача нахождения корней характеристического уравнения часто оказывается плохо обусловленной. В настоящее время разработаны специальные алгоритмы и программы решения проблемы собственных значений для матриц большой размерности [12]. В настоящей работе для сооружений башенного типа показан расчет частот свободных колебаний для матриц размерности 5×5 , а также вычислительный прием, позволяющий определять коэффициенты и корни характеристического уравнения классическим методом для матриц размерности 6×6 .

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим задачу определения частот свободных колебаний сооружения башенного типа, моделированного по методу замены масс упругой системой с конечным числом степеней свободы. Для нахождения частот свободных колебаний ω упругой системы с n степенями свободы следует решить характеристическое уравнение, которое получается при раскрытии определителя, называемого вековым уравнением [13]:



$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \lambda & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \lambda & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & \delta_{nn}m_n - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где δ_{ij} – перемещения по направлению i от действия единичной силы по направлению j , вычисляемые по правилам строительной механики; $\lambda = 1/\omega^2$.

Результатом раскрытия определителя (1) является характеристическое алгебраическое уравнение, полином n -степени относительно λ :

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_n = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты p_i уравнения (2) можно найти несколькими вычислительными методами линейной алгебры. Покажем два метода, которые достаточно просто и удобно реализуются при помощи электронных таблиц. Применение электронных таблиц значительно облегчает вычисления частот собственных колебаний систем с числом степеней свободы больше трех. Создание алгоритмов расчета для сооружений с однотипными конструктивными схемами позволяет автоматизировать процесс определения частот собственных колебаний, существенно упрощает отдельные операции вычислений, ускоряет процесс расчета в целом и повышает его точность.

Приведем решение задачи раскрытия определителя (1) методом Фаддеева [11], согласно которому коэффициенты p_i вычисляются как следы некоторых матриц $A_1, A_2, \dots, A_n$, полученных по формулам преобразования:

$$A_1 = DM, p_1 = -\text{tr}(A_1), B_1 = A_1 + p_1 E; \quad (3)$$

$$A_2 = A_1 B_1, p_2 = -(1/2)\text{tr}(A_2), B_2 = A_2 + p_2 E; \quad (4)$$

...

$$A_n = A_1 B_{n-1}, p_n = -(1/n)\text{tr}(A_n), B_n = A_n + p_n E = 0, \quad (5)$$

где M – диагональная матрица масс, E – единичная матрица, D – матрица податливости, определяемая выражением:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Найдем частоты свободных колебаний башни связи, моделированной по методу замены масс в виде консоли с пятью сосредоточенными массами и постоянной изгибной жесткостью $EI = \text{const}$ (рис. 1).

Загружаем последовательно расчетную схему пятью единичными силовыми факторами $J_i = 1$ и строим эпюры моментов. Перемещения δ_{ij} вычислим по формуле Максвелла-Мора перемножением единичных эпюр моментов (правило Верещагина). Для консоли перемножение единичных эпюр моментов несложно преобразовать:

$$\delta_{ii} = \frac{c_i^3}{3EI}; \quad (7)$$

$$\delta_{ij} = \frac{c_i^2}{2EI} \left(c_j - \frac{c_i}{3} \right), \quad (8)$$

где c_i, c_j – ординаты единичных эпюр моментов, причем при перемножении эпюр M_i и M_j в формулу (8) нужно подставлять $c_j > c_i$.

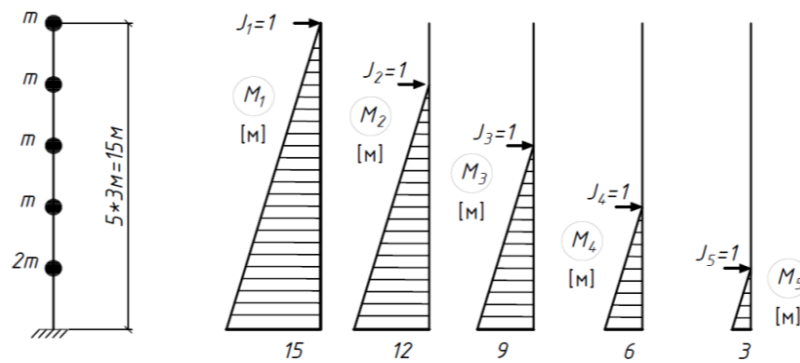
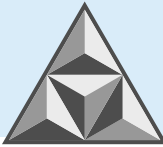


Рис. 1. Расчетная схема консоли с пятью сосредоточенными массами и единичные эпюры

Fig. 1. Calculation diagram of a console with five concentrated masses and unit diagrams

Заполняем матрицу податливости (6) вычисленными единичными перемещениями:

$$D = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 1125 & 792 & 486 & 234 & 63 \\ 792 & 576 & 364.5 & 180 & 49.5 \\ 486 & 364.5 & 243 & 126 & 36 \\ 234 & 180 & 126 & 72 & 22.5 \\ 63 & 49.5 & 36 & 22.5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Умножаем матрицу податливости на диагональную матрицу масс и получаем матрицу A_1 :

$$A_1 = \frac{m}{EI} \begin{vmatrix} 1125 & 792 & 486 & 234 & 126 \\ 792 & 576 & 364.5 & 180 & 99 \\ 486 & 364.5 & 243 & 126 & 72 \\ 234 & 180 & 126 & 72 & 45 \\ 63 & 49.5 & 36 & 22.5 & 18 \end{vmatrix}.$$

Коэффициент p_1 вычисляем как след матрицы A_1 :

$$p_1 = -tr(A_1) = -2.03 \cdot 10^3 \frac{m}{EI}.$$

Вычисляем по формуле (2) матрицу B_1 :

$$B_1 = \left(\frac{m}{EI}\right)^2 \begin{vmatrix} -909 & 792 & 486 & 234 & 126 \\ 792 & -1458 & 364.5 & 180 & 99 \\ 486 & 364.5 & -1791 & 126 & 72 \\ 234 & 180 & 126 & -1962 & 45 \\ 63 & 49.5 & 36 & 22.5 & -2016 \end{vmatrix}.$$

Выполняем в электронной таблице стандартные операции по сложению и перемножению матриц по формулам (4) и (5) и получаем остальные коэффициенты характеристического уравнения:

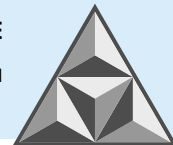
$$p_2 = -tr(A_2) = 1.22 \cdot 10^5 \frac{m^2}{(EI)^2}; \quad p_3 = -tr(A_3) = -1.11 \cdot 10^6 \frac{m^3}{(EI)^3};$$

$$p_4 = -tr(A_4) = 2.45 \cdot 10^6 \frac{m^4}{(EI)^4}; \quad p_5 = -tr(A_5) = -1.34 \cdot 10^6 \frac{m^5}{(EI)^5}.$$

Подставляем вычисленные коэффициенты p_i в формулу (2):

$$\lambda^5 - 2.03 \cdot 10^3 \frac{m\lambda^4}{EI} + 1.22 \cdot 10^5 \frac{m^2\lambda^3}{(EI)^2} - 1.11 \cdot 10^6 \frac{m^3\lambda^2}{(EI)^3} + 2.45 \cdot 10^6 \frac{m^4\lambda}{(EI)^4} - 1.34 \cdot 10^6 \frac{m^5}{(EI)^5} = 0.$$

Решаем полученное уравнение относительно λ в электронной таблице. Для этого в электронной таблице строим график функции $f(\lambda)$ и определяем интервалы, в которых данная функция меняет знак. Размер шага $\Delta\lambda$ определяем по графику. Корни уравнения в интервалах находим с использованием стандартной опции электронной таблицы «Подбор параметра» (закладка «Данные» в команде «Анализ если что»).



Получили следующие значения корней характеристического уравнения:

$$\lambda_5 = 0.821 \frac{m}{EI}; \quad \lambda_4 = 2.139 \frac{m}{EI}; \quad \lambda_3 = 7.569 \frac{m}{EI}; \quad \lambda_2 = 50.937 \frac{m}{EI}; \quad \lambda_1 = 1972.534 \frac{m}{EI}.$$

Частоты собственных колебаний получаем из λ как $\omega = \sqrt{1/\lambda}$:

$$\omega_1 = 0.0225 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_2 = 0.1401 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_3 = 0.3635 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_4 = 0.6837 \sqrt{\frac{EI}{m}}; \quad \omega_5 = 1.1034 \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Результаты расчетов проверены на ортогональность главных форм свободных колебаний.

Покажем раскрытие определителя методом Крылова [11], в соответствии с которым вычисление коэффициентов p_i характеристического полинома (2) сводится к решению линейной системы уравнений:

$$p_1 y_j^{(n-1)} + p_2 y_j^{(n-2)} + \dots + p_n y_j^{(0)} = -y_j^{(n)} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Коэффициенты в ней находятся по формулам:

$$y_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(0)}; \quad y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(1)}; \quad \dots; \quad y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(n-1)}. \quad (10)$$

Вычислим частоты свободных колебаний башни связи, моделированной по методу замены масс в виде консоли с шестью сосредоточенными массами и постоянной изгибной жесткостью $EI = \text{const}$ (рис. 2).

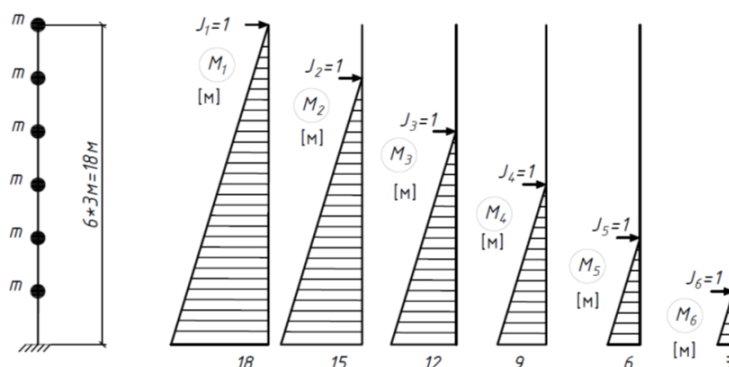


Рис. 2. Расчетная схема консоли с шестью сосредоточенными массами и единичные эпюры

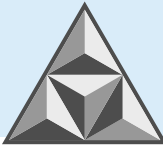
Fig. 2. Calculation diagram of a console with six concentrated masses and unit diagrams

Загружаем последовательно расчетную схему шестью единичными силовыми факторами $J_i = 1$ и строим эпюры моментов. Перемещения δ_{ij} вычисляются по формуле Максвелла-Мора стандартным перемножением единичных эпюр моментов (правило Верещагина). Применим следующий вычислительный прием. Поскольку расчетная схема имеет регулярный шаг расположения масс размером $s = 3$ м, вычисленные координаты масс и ординаты эпюр моментов можно представить в виде $c_i = k_i \cdot s$. Тогда перемножение единичных эпюр моментов несложно преобразовать к виду:

$$\delta_{ii} = s^3 \frac{k_i^3}{3EI}; \quad (11)$$

$$\delta_{ij} = s^3 \frac{k_i^2}{2EI} \left(k_j - \frac{k_i}{3} \right), \quad (12)$$

где k_i, k_j – множители кратности ординат единичных эпюр моментов ($k_1 = 6, k_2 = 5, k_3 = 4, k_4 = 3, k_5 = 2, k_6 = 1$), причем при перемножении эпюр M_i и M_j в формулу (8) нужно подставлять $k_j > k_i$.



Заполняем матрицу податливости (6) вычисленными единичными перемещениями:

$$D = \frac{s^3}{EI} \begin{vmatrix} 72 & 54.17 & 37.33 & 22.5 & 10.67 & 2.83 \\ 54.15 & 41.67 & 29.33 & 18.00 & 8.67 & 2.33 \\ 37.33 & 29.33 & 21.33 & 13.50 & 6.67 & 1.83 \\ 22.50 & 18.00 & 13.50 & 9.00 & 4.67 & 1.33 \\ 10.67 & 8.67 & 6.67 & 4.67 & 2.67 & 0.83 \\ 2.83 & 2.33 & 1.83 & 1.33 & 0.83 & 0.33 \end{vmatrix}.$$

Умножаем матрицу податливости на диагональную матрицу масс и получаем матрицу A:

$$A = \frac{ms^3}{EI} \begin{vmatrix} 72 & 54.17 & 37.33 & 22.5 & 10.67 & 2.83 \\ 54.15 & 41.67 & 29.33 & 18.00 & 8.67 & 2.33 \\ 37.33 & 29.33 & 21.33 & 13.50 & 6.67 & 1.83 \\ 22.50 & 18.00 & 13.50 & 9.00 & 4.67 & 1.33 \\ 10.67 & 8.67 & 6.67 & 4.67 & 2.67 & 0.83 \\ 2.83 & 2.33 & 1.83 & 1.33 & 0.83 & 0.33 \end{vmatrix}.$$

Выбираем начальный вектор $y^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$

Определяем координаты последующих векторов по методу Крылова, умножая матрицу A на координаты предыдущих векторов. Вычисления выполняем в электронной таблице.

$$y^{(1)} = A \cdot y^{(0)} = \frac{ms^3}{EI} \begin{vmatrix} 72 \\ 54.17 \\ 37.33 \\ 22.5 \\ 10.67 \\ 2.83 \end{vmatrix}; \quad y^{(2)} = A \cdot y^{(1)} = \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^2 \begin{vmatrix} 10140 \\ 7756 \\ 5453 \\ 3355 \\ 1622 \\ 439 \end{vmatrix};$$

$$y^{(3)} = A \cdot y^{(2)} = \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^3 \begin{vmatrix} 1.45 \cdot 10^6 \\ 1.11 \cdot 10^6 \\ 7.79 \cdot 10^5 \\ 4.80 \cdot 10^5 \\ 2.32 \cdot 10^5 \\ 6.28 \cdot 10^4 \end{vmatrix}; \quad y^{(4)} = A \cdot y^{(3)} = \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^4 \begin{vmatrix} 2.07 \cdot 10^8 \\ 1.58 \cdot 10^8 \\ 1.11 \cdot 10^8 \\ 6.85 \cdot 10^7 \\ 3.32 \cdot 10^7 \\ 8.96 \cdot 10^5 \end{vmatrix};$$

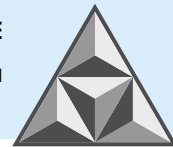
$$y^{(5)} = A \cdot y^{(4)} = \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^5 \begin{vmatrix} 2.95 \cdot 10^{10} \\ 2.26 \cdot 10^{10} \\ 1.59 \cdot 10^{10} \\ 9.79 \cdot 10^9 \\ 4.73 \cdot 10^9 \\ 1.28 \cdot 10^9 \end{vmatrix}; \quad y^{(6)} = A \cdot y^{(5)} = \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^6 \begin{vmatrix} 4.22 \cdot 10^{12} \\ 3.23 \cdot 10^{12} \\ 2.27 \cdot 10^{12} \\ 1.40 \cdot 10^{12} \\ 6.76 \cdot 10^{11} \\ 1.83 \cdot 10^{11} \end{vmatrix}.$$

Подставляем полученные размеры векторов в выражение (9) и получаем систему уравнений относительно p_i . Решая полученную систему уравнений в электронной таблице при помощи стандартных встроенных функций МОБР и МУМНОЖ, получаем значения коэффициентов характеристического уравнения:

$$p_1 = -1.47 \cdot 10^2 \frac{ms^3}{EI}; \quad p_2 = 5.93 \cdot 10^2 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^2; \quad p_3 = -3.18 \cdot 10^2 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^3; \\ p_4 = 3.98 \cdot 10 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^4; \quad p_5 = -1.25 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^5; \quad p_6 = 1.07 \cdot 10^2 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^6.$$

Подставляем вычисленные коэффициенты p_i в формулу (2):

$$\lambda^6 - 147\lambda^5 \frac{ms^3}{EI} + 593\lambda^4 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^2 - 318\lambda^3 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^3 + 39.8\lambda^2 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^4 - 1.25\lambda \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^5 + 107 \left(\frac{ms^3}{EI}\right)^6 = 0.$$



Решаем полученное уравнение относительно λ в электронной таблице. Для этого в ней выполняем операции, аналогичные показанным выше для системы с пятью сосредоточенными массами. При этом корректируем значения корней, подставляя полученные размеры напрямую в вековое уравнение (1) при помощи стандартной функции МОПРЕД и опции «Подбор параметра» с закладки «Данные» в команде «Анализ если что».

Получаем следующие значения корней характеристического уравнения свободных колебаний системы с шестью сосредоточенными массами:

$$\lambda_6 = 0.0146 \frac{ms^3}{EI}; \quad \lambda_5 = 0.025 \frac{ms^3}{EI}; \quad \lambda_4 = 0.123 \frac{ms^3}{EI};$$

$$\lambda_3 = 0.443 \frac{ms^3}{EI}; \quad \lambda_2 = 3.530 \frac{ms^3}{EI}; \quad \lambda_1 = 142.832 \frac{ms^3}{EI}.$$

Частоты собственных колебаний получаем из λ как $\omega = \sqrt{1/\lambda}$:

$$\omega_1 = 0.0837 \sqrt{\frac{EI}{ms^3}}; \quad \omega_2 = 0.532 \sqrt{\frac{EI}{ms^3}}; \quad \omega_3 = 1.502 \sqrt{\frac{EI}{ms^3}},$$

$$\omega_4 = 2.857 \sqrt{\frac{EI}{ms^3}}; \quad \omega_5 = 6.325 \sqrt{\frac{EI}{ms^3}}; \quad \omega_6 = 8.272 \sqrt{\frac{EI}{ms^3}}$$

Результаты расчетов проверены на ортогональность главных форм свободных колебаний.

Расхождение с точным решением размера первой частоты собственных колебаний консольной балки с распределенной массой составляет менее 3%.

Произведенные расчеты в настоящем исследовании показаны для упругих систем с постоянной изгибной жесткостью. Однако примененные численные методы позволяют учитывать также ступенчатое изменение изгибной жесткости по высоте башни.

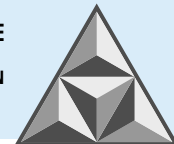
ВЫВОДЫ

Показана возможность применения численных методов Д.К. Фаддеева и А.Н. Крылова и электронных таблиц для расчета частот свободных колебаний элементов строительных конструкций. Выявлено, что результаты расчетов с использованием электронной таблицы находятся в корреляции с таковыми, полученными с применением промышленных пакетов программ.

Разработанная электронная таблица рекомендуется для практического использования в динамических расчетах сооружений башенного типа с конечным числом степеней свободы.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Попов Н.А.** Рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки. М.: ЦНИИСК. 2000. 45 с.
2. **Глушко А.П.** Ветровое воздействие, включая пульсационную составляющую ветровой нагрузки // *Молодой ученый*. 2024. № 22 (521). С. 100-101.
3. **Арсентьева А.А., Протасов А.М., Тумаков С.А.** Исторический обзор динамических воздействий на здания и сооружения: собственные колебания. Основные вопросы и задачи // *Семьдесят первая Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высш. учеб. завед. с межд. уч.*: Сб. мат. Ч. 2. Ярославль, Ярославский гос. техн. ун-т. 2018. С. 764-766.
4. **Кулябко В.В.** Динамика сооружений и проявление аспектов науки и безопасности в строительных объектах и процессах // *Наука и безопасность*. 2012. № 5. С. 86-96.



5. **Tamrazyan A., Chernik V.** Equivalent viscous damping ratio for a RC column under seismic load after a fire // *IOP Conf. Ser.: Mat. Sci. Eng.*, 7, Tashkent, 11-14 ноября 2020 года. Tashkent, 2021. P. 012095. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012095.
6. **Темнов В.Г.** Автоматизированный расчет и оптимизация конструкций быстровозводимых зданий из унифицированных элементов на статические и динамические воздействия // *Вестник гражданских инженеров*. 2020. № 3 (80). С. 62-71. DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-3-62-71.
7. **Игнатьев В.А., Ромашкин В.Н.** Алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задачах динамики и устойчивости конструкций // *Интернет-вестник ВолгГАСУ*. 2015. № 2 (38). С. 7.
8. **Лампси Б.Б., Хазов П.А., Кофорова О.М., Генералова А.А.** Методы определения собственных частот многоэтажных зданий // *Вестник Волж. регион. отд. Росс. акад. архитектуры и строит. наук*. 2016. № 19. С. 176-180.
9. **Хазов П.А., Кожанов Д.А., Анущенко А.М., Сатанов А.А.** Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях: колебания, прочность, ресурс. Нижегородский гос. арх.-строит. ун-т. Нижний Новгород: 2022. 96 с.
10. **Спиридонов С.В., Ключникова О.Н.** Определение форм и частот собственных колебаний высотных зданий при расчете пульсационной составляющей ветровой нагрузки // *Вестник КИГИТ*. 2012. № 3 (21). С. 16-25.
11. **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз. 1960. 656 с.
12. **Bathe K.J.** *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1051 p. URL: https://www.academia.edu/8326777/FEA_Finite_Element_Procedures_by_K_J_Bathe (дата обращения 28.12.2024)
13. **Волков А.С., Плотников Ю.Г.** Динамические расчеты упругих систем: учеб. пособие. ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения». Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2007. 95 с.

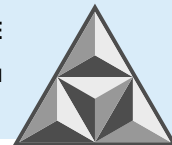
Поступила в редакцию 15.01.2025

Одобрена после рецензирования 21.02.2025

Принята к опубликованию 04.03.2025

REFERENCES

1. **Popov, N.A.** (2000), *Rekomendatsii po utochnennomu dinamicheskomu raschetu zdaniy i sooruzhenij na deistvie pul'satsionnoj sostavlyayushchej vetrovoj nagruzki* [Recommendations on the updated dynamic calculation of buildings and structures for the action of the pulsation component of wind load], TsNIISK, Moscow, Russia (in Russian).
2. **Glushko, A.P.** (2024), "Wind impact, including the pulsation component of the wind load", *Molodoj uchenyi* [Young Scientist], vol. 22 (521), pp. 100-101 (in Russian).
3. **Arsentieva, A.A., Protasov, A.A. and Tumakov, S.A.** (2018), Historical review of dynamic effects on buildings and structures: natural vibrations. Basic questions and tasks, *Sem'desyat pervaya Vseros. nauch.-tekhn. konf. studentov, magistrantov i aspirantov vyssh. ucheb. zaved. s mezhd. uch.: Sb. mat.* [Seventy-first All-Russian Scientific and Technical Conf. of students, undergraduates and postgraduates of higher educational institutions with international studies: Collection of mat.], Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, pp. 764-766 (in Russian).
4. **Kulyabko, V.V.** (2012), "Dynamics of constructions and manifestation of science and safety aspects in construction objects and processes", *Nauka i bezopasnost'* [Science and Safety], vol. 5, pp. 86-96 (in Russian).
5. **Tamrazyan A. and Chernik V.** (2021), "Equivalent viscous damping ratio for a RC column under seismic load after a fire", *IOP Conf. Ser.: Mat. Sci. Eng.*, 7, Tashkent, 11-14 Nov. 2020, Tashkent, p. 012095. DOI 10.1088/1757-899X/1030/1/012095.



6. **Temnov, V.G.** (2020), "Automated calculation and optimisation of the structures of the fast-erected buildings from the unified elements for static and dynamic impacts", Vestnik grazhdanskikh inzhenerov [Vestnik of Civil Engineers], vol. 3 (80), pp. 62-71. DOI 10.23968/1999-5571-2020-17-3-62-71 (in Russian).
7. **Ignatyev, V.A. and Romashkin, V.N.** (2015), "Algebraic problem of eigenvectors and high-order eigenvalues in the tasks of dynamics and stability of structures", Internet-vestnik VolgASU, vol. 2, no. 38, p. 7 (in Russian).
8. **Lampsey, B.B., Khazov, P.A., Koforova, O.M. and Generalova, A.A.** (2016), "Methods for determining the natural frequencies of multi-storey buildings", Vestnik Volzh. region. otd. Ross. akad. arkhitektury i stroit. nauk, vol. 19, pp. 176-180 (in Russian).
9. **Khazov, P.A., Kozhanov, D.A., Anushchenko, A.M. and Satanov, A.A.** (2022), Dinamika stroitel'nykh konstrukcij pri ekstremal'nykh prirodnykh vozdeistviyakh: kolebaniya, prochnost', resurs [Dynamics of building structures under extreme natural influences: vibrations, strength, resource], Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russia (in Russian).
10. **Spiridonov S.V. and Klyuchnikova O.N.** (2012), "Determination of shapes and frequencies of natural vibrations of high-rise buildings when calculating the pulsation component of wind load", Vestnik KIGIT, vol. 3, no. 21, pp. 16-25 (in Russian).
11. **Faddeev, D.K. and Faddeeva V.N.** (1960), Vychislitel'nye metody lineinoi algebry [Computational Methods of Linear Algebra], Fizmatgiz, Moscow, UdSSR (in Russian).
12. **Bathe, K-J.** (1996), Finite Element Procedures, Prentice Hall, New Jersey. URL: https://www.academia.edu/8326777/FEA_Finite_Element_Procedures_by_K_J_Bathe (accessed 28.12.2024)
13. **Volkov, A.S. and Plotnikov, Yu.G.** (2007), Dinamicheskie raschety uprugikh sistem: ucheb. posobie [Dynamic calculations of elastic systems: textbook], Far Eastern State University of Railway Transport, Khabarovsk, Russia (in Russian).

Received 15.01.2025

Approved 21.02.2025

Accepted 04.03.2025