



УДК: 536.212.3

МЕТОД «МИКРОПРОЦЕССОВ» ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ В ТЕЛАХ КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ. ОБОБЩЕННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ III РОДА

С.В. Федосов^{1,2}, М.О. Баканов³

Сергей Викторович Федосов

¹Кафедра технологии вяжущих веществ и бетонов, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Ярославское шоссе, 26, Москва, Российская Федерация, 129337;

²Поволжский государственный технический университет, пл. Ленина, 3, Йошкар-Ола, Республика Марий Эл, Российская Федерация, 424000

E-mail: FedosovSV@mgsu.ru

Максим Олегович Баканов

³Кафедра пожарной тактики и основ аварийно-спасательных и других неотложных работ (в составе УНК «Пожаротушение»), Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России, пр-т Строителей, 33, Иваново, Российская Федерация, 153011

E-mail: mask-13@mail.ru



Большинство материалов, проходящих обработку в производственных процессах химической технологии, с точки зрения принципов геометрии могут быть сведены к традиционным телам канонической формы: пластина, цилиндр, шар. В процессах термической обработки твёрдых материалов (тепловлажностная обработка, сушка, обжиг) потенциалы переноса (температура, массосодержание) существенно меняются во времени процесса. Для решения краевых задач тепло- и массо-(влаго-)проводности в подобных случаях ранее были предложены «зональный» метод и метод «микропроцессов». Возможности метода «микропроцессов», применительно к моделированию краевых задач тепломассопереноса для тел канонической формы при граничных условиях первого рода (условиях Дирихле), были показаны в предыдущих работах авторов. В настоящей работе приводится изложение иллюстрации применения метода «микропроцессов» для решения краевых задач тепло- и влагопроводности при более общих граничных условиях, условиях III рода (Римана-Ньютона). Большая универсальность этих условий заключается в том, что в зависимости от значений числа Био (Bi) они преобразуются в условие первого рода (Bi стремится к нулю) или второго (Bi стремится к бесконечности). Показано, что для моделирования процессов тепломассопереноса в системах с твёрдой фазой на основе метода «микропроцессов» перспективным является поиск решений в области малых значений чисел Фурье ($Fo < 0,1$). Приведены решения соответствующих краевых задач и показаны примеры результатов их численной реализации.

Ключевые слова: термическая обработка, тепломассоперенос, пластина, цилиндр, сфера, «зональный» метод, метод «микропроцессов», малые значения числа Фурье

Для цитирования:

Федосов С.В., Баканов М.О. Метод «микропроцессов» при моделировании процессов теплопроводности и диффузии в телах канонической формы. Обобщенные граничные условия III рода. Умные композиты в строительстве 2021. Т. 2. №. 2. С. 7-15 URL: http://comincon.ru/index.php/tor/issue/view/V2N2_2021

DOI: 10.52957/27821919_2021_2_7



UDC: 536.212.3

METHOD OF «MICROPROCESSES» IN MODELING THE PROCESSES OF THERMAL CONDUCTIVITY AND DIFFUSION IN BODIES OF CANONICAL SHAPE. GENERALIZED BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD KIND

S.V. Fedosov^{1,2}, M.O. Bakanov³

Sergey V. Fedosov

¹Department of Technology of Binders and Concrete, Moscow State University of Civil Engineering, Yaroslavl highway, 26, Moscow, Russian Federation, 129337

²Volga State University of Technology, Lenin Square, 3, Yoshkar-Ola, Mari El Republic, 424000, Russia

E-mail: FedosovSV@mgsu.ru

Maksim O. Bakanov

³Department of Fire Tactics and the Basics of Rescue and Other Emergency Operations, Ivanovo Fire Rescue Academy of State Firefighting Service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, Stroiteley ave., 33, Ivanovo, 153011, Russia

E-mail: mask-13@mail.ru



Most of the materials undergoing processing in the production processes of chemical technology, from the point of view of the principles of geometry, can be reduced to traditional bodies of canonical shape: a plate, a cylinder, a ball. In the processes of heat treatment of solid materials (heat-moisture treatment, drying, firing), the transfer potentials (temperature, mass content) change significantly over the time of the process. To solve boundary value problems of heat and mass (moisture) conductivity in such cases, the "zonal" method and the "microprocess" method were previously proposed. The possibilities of the "microprocesses" method applied to modeling boundary value problems of heat and mass transfer for bodies of canonical shape under boundary conditions of the first kind (Dirichlet conditions) were shown in the previous works of the authors. This paper presents an illustration of the application of the "microprocess" method for solving boundary value problems of heat and moisture conductivity under more general boundary conditions, conditions of the third kind (Rie-mann-Newton). The great universality of these conditions lies in the fact that, depending on the values of the Biot number (Bi), they transform into a condition of the first kind (Bi tends to zero) or the second (Bi tends to infinity). It is shown that the search for solutions in the region of small values of Fourier numbers ($Fo < 0.1$) is promising for modeling the processes of heat and mass transfer in systems with a solid phase based on the method of "micro-processes". Solutions of the corresponding boundary value problems are given and examples of the results of their numerical implementation are shown.

Key words: heat treatment, heat and mass transfer, plate, cylinder, sphere, "zonal" method, "micro-processes" method, low Fourier numbers

For citation:

Fedosov S.V., Bakanov M.O. Method of «microprocesses» in modeling the processes of thermal conductivity and diffusion in bodies of canonical shape. Generalized boundary conditions of the third kind. Smart Composite in Construction. 2021. Vol. 2. No 2. P. 7-15 URL: [http:// http://comincon.ru/index.php/tor/issue/view/V2N2_2021](http://comincon.ru/index.php/tor/issue/view/V2N2_2021)

DOI: 10.52957/27821919_2021_2_7



ВВЕДЕНИЕ

В [1] рассмотрены случаи синтеза математических моделей процессов тепло- и массопереноса в телах канонической формы (пластина, цилиндр, сфера). Проблема рассмотрена для задач теплопроводности и диффузии в твердых телах. При этом для упрощения выкладок (преобразований) рассмотрены задачи с граничными условиями первого рода, называемые также условиями Дирихле [2]. Решение краевых задач тепло- и влагопроводности при общих граничных условиях III рода (Римана-Ньютона) обладает своей универсальностью, так как в зависимости от значений числа Био (Bi), они преобразуются в условие первого рода (Bi стремится к нулю) или второго рода (Bi стремится к бесконечности).

При этом задается закон изменения потенциала переноса (теплоты и массы) на границе твердого тела с окружающей средой.

В [1] также приведены выражения для расчета полей температур в зависимости от теплофизических параметров, а также полей потенциалов массопереноса.

В фундаментальной монографии академика А.В. Лыкова и профессора Ю.А. Михайлова [3] приведены решения многих задач теплопроводности и диффузии для тел различной конфигурации, включая и тела канонической формы. При этом можно отметить два принципиальных момента. Первый – решения, полученные в форме рядов Фурье, характерны для задач с неравномерными начальными распределениями потенциалов переноса теплоты и массы вещества. В случае равномерных начальных распределений из полученных решений легко получаются частные случаи для равномерных начальных условий. При этом решений для малых значений чисел Фурье (Fo , $Fo_m < 0,1$) не приводится.

Вместе с тем, как уже не раз отмечалось в специальной литературе [4], решения в форме рядов Фурье обладают одной «неприятной» особенностью: с уменьшением времени процесса уменьшаются и числовые значения критериев Фурье, характеризующих подобие нестационарных процессов тепло- и массопереноса (Fo_n , Fo_m). Это, в свою очередь, приводит к увеличению числа членов бесконечного ряда и нарастанию ошибки вычислений. Принципиальное значение эти факторы приобретают при реализации методов расчета с использованием «зонального» метода [5] и метода «микрпроцессов» [4].

В [1] изложена методология получения решений задач тепло- и массопереноса при неравномерных начальных распределениях потенциалов переноса. Целью настоящей работы является изложение принципов получения решений краевых задач для более общих граничных условий – условий третьего рода, или условий Ньютона [2].

Обратим внимание на тот факт, что граничные условия являются общими для задач теплопроводности и диффузии. При $Bi \rightarrow 0$ они переходят в условия второго рода (условие Неймана), а при $Bi \rightarrow \infty$ переходят в условия первого рода (условие Дирихле).

МЕТОДИКА ТЕОРЕТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

$$\frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 \theta(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\Gamma}{x} \cdot \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right]; \quad \theta > 0; \quad 0 \leq x \leq R; \quad (1)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\alpha[\theta_c - \theta(R, \tau)] = \lambda \frac{\theta(R, \tau)}{x}, \quad (4)$$

где $\Gamma = 0$ для задач тепло-(массо-)переноса для неограниченной пластины; $\Gamma = 1$ для задач тепло-(массо-)переноса для неограниченного цилиндра; $\Gamma = 2$ для задач тепло-(массо-)переноса для сферы.

Введём в рассмотрение безразмерные величины

$$\theta(\bar{x}, Fo) = \frac{\theta_c - \theta(x, \tau)}{\theta_c - \theta_0}; \quad Fo = \frac{a\tau}{R^2}; \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}; \quad \bar{x} = \frac{x}{R}, \quad (5)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, $\frac{Вт}{м^2 \cdot К}$

Соответственно, для задач массопереноса по аналогии можно записать

$$\theta_m(\bar{x}, Fo_m) = \frac{\theta_{0,m} - \theta_m(x, \tau)}{\theta_{0,m} - \theta_{c,m}}; \quad Fo_m = \frac{k\tau}{R^2}; \quad Bi_m = \frac{\beta R}{k}, \quad (6)$$

где β – коэффициент массоотдачи, $м/с$; k – коэффициент массопроводности, $м^2/с$.

В принятых безразмерных переменных краевая задача теплопереноса примет следующий вид ($\Gamma=0$):

$$\frac{\partial \theta(\bar{x}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(\bar{x}, Fo)}{\partial \bar{x}^2}; \quad Fo > 0; \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1; \quad (7)$$

$$\theta(\bar{x}, 0) = \frac{\theta_c - \theta(x, 0)}{\theta_c} = \theta_0(\bar{x}); \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{\theta_c - \theta(0, Fo)}{\theta_c} \right] = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \bar{x}} = -Bi \cdot \theta(1, Fo). \quad (10)$$

Существует много методов решения краевой задачи, описанной системой уравнений (7)–(10), одним из наиболее перспективных является интегральное преобразование Лапласа [6] по временной переменной Fo [4], тогда можно записать

$$\frac{d^2 \theta(\bar{x}, s)}{d\bar{x}^2} - s \cdot \theta(\bar{x}, s) + \theta_0(\bar{x}) = 0; \quad (11)$$

$$\frac{d\theta(0, s)}{d\bar{x}} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{d\theta(1, s)}{d\bar{x}} = -Bi \cdot \theta(1, s). \quad (13)$$

Уравнение (11) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка [7].

Решая его с использованием граничных условий (12), (13) и опуская несложные, но громоздкие преобразования, запишем решение в области комплексных переменных:



$$\theta(\bar{x}, s) = \frac{(Bish\sqrt{s} + \sqrt{s}ch\sqrt{s})ch(\sqrt{s}\bar{x})}{\sqrt{s}(Bich\sqrt{s} + \sqrt{s}sh\sqrt{s})} \int_0^1 \theta_0(\xi)ch(\sqrt{s}\xi)d\xi - \frac{1}{\sqrt{s}} \left[sh(\sqrt{s}\bar{x}) \int_0^{\bar{x}} \theta_0(\xi)ch(\sqrt{s}\xi)d\xi + ch(\sqrt{s}\bar{x}) \int_{\bar{x}}^1 \theta_0(\xi)sh(\sqrt{s}\xi)d\xi \right], \quad (14)$$

где ξ – переменная, изменяющаяся от 0 до x .

Возвращение из области изображений в область оригиналов производится по формуле обратного преобразования [7]:

$$\theta(\bar{x}, Fo) = L^{-1}[\theta(\bar{x}, s)] = L^{-1} \left[\frac{\varphi(s)}{\psi'(s)} \Big|_{s \rightarrow 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(s)}{\psi'_n(s)} \exp(s_n Fo) \right]. \quad (15)$$

Здесь $\varphi(s)$ и $\psi'(s)$ – соответственно функции, находящиеся в числителе и знаменателе (14).

Обратим внимание на тот факт, что граничное условие (13) является общим для задач теплопроводности и диффузии. При $Bi \rightarrow 0$ оно переходит в условие второго рода (условие Неймана), а при $Bi \rightarrow \infty$ переходит в условие первого рода (условие Дирихле).

В результате математических преобразований в соответствии с формулой (15), оно принимает следующий окончательный вид:

$$\theta(\bar{x}, Fo) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n \exp(-\mu_n^2 Fo)}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n \bar{x}) \int_0^1 T_0(\xi) \cos(\mu_n \xi) d\xi \quad (16)$$

В полученном выражении величина μ_n определяет множество корней характеристического уравнения:

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{\mu_n}{Bi} \quad (17)$$

Аналогичным образом для краевой задачи массопереноса будут справедливы выражения:

$$\theta(\bar{x}, Fo_m) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m \exp(-\mu_m^2 Fo_m)}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cos(\mu_m \bar{x}) \int_0^1 T_0(\xi) \cos(\mu_m \xi) d\xi \quad (18)$$

$$\operatorname{ctg} \mu_m = \frac{\mu_m}{Bi} \quad (19)$$

Основываясь на принципах изложенной методологии решения краевых задач тепло-массопереноса, приведем записи постановки и решения задач для цилиндра и сферы.

Постановка задачи тепло-(массо)-переноса для неограниченного цилиндра ($\Gamma = 1$):

$$\frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial \bar{r}}; \quad Fo > 0; \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1; \quad (20)$$

$$\theta(\bar{r}, Fo)|_{Fo=0} = \theta_0(\bar{r}) \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial \bar{r}} = 0; \quad \theta(0, Fo) \neq \infty; \quad (22)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \bar{r}} = -Bi \cdot \theta(1, Fo). \quad (23)$$

В области комплексных переменных эта задача будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 \theta(\bar{r}, s)}{d\bar{r}^2} - s\theta(\bar{r}, s) + \theta_0(\bar{r}) + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\theta(\bar{r}, s)}{d\bar{r}} = 0; \quad (24)$$

$$\frac{d\theta(0, s)}{d\bar{r}} = 0; \quad \theta(0, s) \neq \infty; \quad (25)$$

$$\frac{d\theta(1, s)}{d\bar{r}} = -Bi \cdot \theta(1, s). \quad (26)$$

И вновь, опуская громоздкие преобразования, приведем решения задачи (24)-(26) в области изображений:

$$\theta(\bar{r}, s) = \frac{I_0(\sqrt{s}\bar{r})}{\psi(s)} \left\{ \psi_1(s) \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) I_0(\sqrt{s}\xi) d\xi + \psi(s) \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) K_0(\sqrt{s}\xi) d\xi \right\} - \frac{\psi_1(s)}{\psi(s)} \left\{ I_0(\sqrt{s}\bar{r}) \int_0^{\bar{r}} \xi \theta_0(\xi) K_0(\sqrt{s}\xi) d\xi - K_0(\sqrt{s}\bar{r}) \int_0^{\bar{r}} \xi \theta_0(\xi) I_0(\sqrt{s}\xi) d\xi \right\}. \quad (27)$$

Здесь $I_0(\sqrt{s})$, $I_0(\sqrt{s}\bar{r})$ – функции Бесселя первого рода от чисто мнимого аргумента нулевого порядка (модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка);

$K_0(\sqrt{s})$, $K_0(\sqrt{s}\bar{r})$ – функции Бесселя второго рода нулевого порядка от чисто мнимого аргумента [8].

Применяя к полученному выражению вновь процедуру обратного преобразования Лапласа в соответствии с (15), получим решение в форме

$$\theta(\bar{r}, Fo) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n J_0(\mu_n \bar{r}) [Y_1(\mu_n) + Bi Y_0(\mu_n)]}{\mu_n J_0(\mu_n) + Bi Y_1(\mu_n)} \exp(-\mu_n^2 Fo) \times \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) J_0(\mu_n \xi) d\xi. \quad (28)$$

Здесь $J_0(\mu_n)$, $J_0(\mu_n \bar{r})$, $J_1(\mu_n)$, $Y_0(\mu_n)$, $Y_1(\mu_n)$ – обычные функции Бесселя, определенные в специальной литературе, например [9].

И вновь отметим, что аналогичным будет и решение задачи массопереноса. При этом у величин μ , Bi , Fo нижним индексом становится величина « m ».

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ДЛЯ СФЕРЫ

Для тела сферической формы ($\Gamma=2$) запишем:

$$\frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial \bar{r}}; \quad Fo > 0; \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1; \quad (29)$$

$$\theta(\bar{r}, Fo)|_{Fo=0} = \theta_0(\bar{r}); \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial \bar{r}} = 0; \quad \theta(0, Fo) \neq \infty; \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \bar{r}} = -Bi \cdot \theta(1, Fo). \quad (32)$$

Отметим, что для граничного условия в центре шара появилось дополнение, что значение температуры в центре не может иметь бесконечной величины.

Производим замену переменной по правилу

$$U(\bar{r}, Fo) = \bar{r} \theta(\bar{r}, Fo). \quad (33)$$



В результате получается выражение вида

$$\frac{\partial U(\bar{r}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 U(\bar{r}, Fo)}{\partial \bar{r}^2}. \quad (34)$$

В дальнейшем, выполняя преобразования по процедуре получения решения для неограниченной пластины, получаем решение в области изображений по Лапласу:

$$\theta(\bar{r}, s) = \frac{sh(\sqrt{s}\bar{r})}{\bar{r}\sqrt{s}[(Bi-1)sh\sqrt{s} + \sqrt{s}\cdot ch\sqrt{s}]} \left\{ \sqrt{s} \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) ch\sqrt{s}(1-\xi) d\xi + \right. \\ \left. + (Bi-1) \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) sh\sqrt{s}(1-\xi) d\xi \right\} - \frac{1}{\bar{r}\sqrt{s}} \int_0^{\bar{r}} \xi \theta_0(\xi) sh\sqrt{s}(\bar{r}-\xi) d\xi. \quad (35)$$

Окончательное решение краевой задачи в области оригиналов имеет следующий вид:

$$\theta(\bar{r}, Fo) = -\frac{2}{\bar{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(Bi-1)\cos\mu_n - \mu_n \cdot \sin\mu_n] \sin(\mu_n \bar{r})}{Bi \cdot \cos\mu_n - \mu_n \sin\mu_n} \times \\ \times \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) \sin(\mu_n \xi) d\xi \cdot \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (36)$$

Характеристическое уравнение для поиска множества корней в данном случае:

$$\operatorname{tg}\mu_n = -\frac{\mu_n}{Bi-1}. \quad (37)$$

И вновь отметим, что решение для задачи массопереноса (диффузии в твердом теле) будет иметь аналогичный вид при использовании обозначений

$$\theta_m(\bar{r}, Fo_m); Bi_m, \mu_m. \quad (38)$$

РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБЛАСТИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЛА ФУРЬЕ

Для того чтобы получить решение краевых задач тепло- и массопереноса для области малых значений чисел Фурье, необходимо использовать следующие свойства гиперболических функций [10]:

$$ch\sqrt{s} = \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}} \right) \equiv \frac{1}{2} e^{\sqrt{s}} \quad (39)$$

$$sh\sqrt{s} = \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}} \right) \equiv \frac{1}{2} e^{\sqrt{s}} \quad (40)$$

$$ch\sqrt{s}\bar{x} = \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{s}\bar{x}} + e^{-\sqrt{s}\bar{x}} \right) \quad (41)$$

$$sh\sqrt{s}\bar{x} = \frac{1}{2} \left(e^{\sqrt{s}\bar{x}} - e^{-\sqrt{s}\bar{x}} \right) \quad (42)$$

В результате выражения (14), (27) и (35) преобразуются к следующему виду:

- пластина:

$$\theta(\bar{x}, s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \left\{ \int_0^{\bar{x}} \theta_0(\xi) e^{\sqrt{s}(\xi-\bar{x})} d\xi + \int_{\bar{x}}^1 \theta_0(\xi) e^{\sqrt{s}(\bar{x}-\xi)} d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^1 \theta_0(\xi) e^{-\sqrt{s}(\bar{x}+\xi)} d\xi \right\} - \frac{Bi-\sqrt{s}}{2\sqrt{s}(Bi+\sqrt{s})} \int_0^1 \theta_0(\xi) e^{\sqrt{s}\xi} d\xi \times \\ \times \left[e^{\sqrt{s}(\bar{x}-2)} + e^{-\sqrt{s}(\bar{x}+2)} \right]; \quad (43)$$

- цилиндр:

$$\theta(\bar{r}, s) = \frac{1}{\psi(s)} \left\{ \sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) \int_0^{\bar{r}} \xi \theta_0(\xi) K_0(\sqrt{s}\bar{r}) I_0(\sqrt{s}\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{\bar{r}}^1 \xi \theta_0(\xi) I_0(\sqrt{s}\bar{r}) K_0(\sqrt{s}\xi) d\xi \right\} + Bi I_0(\sqrt{s}) \int_0^{\bar{r}} \xi \theta_0(\xi) K_0(\sqrt{s}\bar{r}) I_0(\sqrt{s}\xi) d\xi + \\ + \int_{\bar{r}}^1 \xi \theta_0(\xi) I_0(\sqrt{s}\bar{r}) K_0(\sqrt{s}\xi) d\xi + \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}) I_0(\sqrt{s}\bar{r}) \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) I_0(\sqrt{s}\xi) d\xi - \\ - Bi K_0(\sqrt{s}) I_0(\sqrt{s}\bar{r}) \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) I_0(\sqrt{s}\xi) d\xi \}; \quad (44)$$

- сфера:

$$\theta(\bar{r}, s) = \frac{1}{2\bar{r}\sqrt{s}} \left\{ \int_0^{\bar{r}} \xi \theta_0(\xi) e^{-\sqrt{s}(\bar{r}-\xi)} d\xi + \int_{\bar{r}}^1 \xi \theta_0(\xi) e^{-\sqrt{s}(\xi-\bar{r})} d\xi - \right. \\ \left. - \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) e^{-\sqrt{s}(\bar{r}+\xi)} d\xi \right\} + \frac{(Bi-1)-\sqrt{s}}{2\bar{r}\sqrt{s}(Bi-1+\sqrt{s})} \times \\ \times \left\{ \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) e^{-\sqrt{s}(2+\bar{r}-\xi)} d\xi - \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) e^{-\sqrt{s}(2-\bar{r}-\xi)} d\xi \right\}. \quad (45)$$

Соответствующие им окончательные решения краевых задач в области оригиналов будут иметь следующий вид:

- пластина:

$$\theta(\bar{x}, Fo) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}} \left\{ \int_0^1 \theta_0(\xi) \exp\left[-\frac{(\bar{x}\pm\xi)^2}{4Fo}\right] d\xi + \int_0^1 \theta_0(\xi) \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-\frac{(2\pm\bar{x}-\xi)^2}{4Fo}\right] d\xi \right\} - Bi \exp(Bi^2 Fo) \int_0^1 \theta_0(\xi) \times \\ \times \exp\left[Bi(2\pm\bar{x}-\xi)\right] \operatorname{erfc}\left(\frac{2\pm\bar{x}-\xi}{2\sqrt{Fo}} + Bi\sqrt{Fo}\right) d\xi; \quad (46)$$

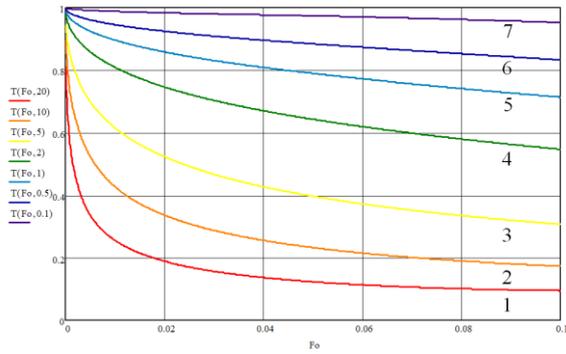


Рис. 1. Изменение безразмерной температуры поверхности пластины в зависимости от значений чисел Био и Фурье при Bi: 1) 20; 2) 10; 3) 5; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,1
Fig. 1. Change of the dimensionless temperatures of the surface of a plate depending on the values of the Biot and Fourier numbers at Bi: 1) 20; 2) 10; 3) 5; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,1

- цилиндр:

$$\theta(\bar{r}, Fo) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Fo}} \int_0^1 \xi \sqrt{2\theta_0(\xi)} \left\{ \exp\left[-\frac{(\bar{r}-\xi)^2}{4Fo}\right] + \exp\left[-\frac{(2-\bar{r}-\xi)^2}{4Fo}\right] \right\} d\xi - \frac{Bi}{\bar{r}} \int_0^1 \xi \sqrt{2\theta_0(\xi)} \exp\left[Bi(2-\bar{r}-\xi) + Bi^2 Fo\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{(2-\bar{r}-\xi)}{2\sqrt{Fo}} + Bi\sqrt{Fo}\right] d\xi; \quad (47)$$

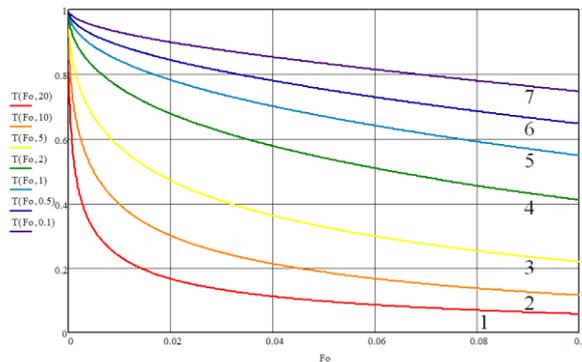


Рис. 2. Изменение безразмерной температуры поверхности цилиндра при Bi: 1) 20; 2) 10; 3) 5; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,1
Fig. 2. Change of dimensionless temperature of the surface of a cylinder at Bi: 1) 20; 2) 10; 3) 5; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,1

- сфера:

$$\theta(\bar{r}, Fo) = \frac{(\pm)1}{2\bar{r}\sqrt{\pi Fo}} \left\{ \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) \exp\left[-\frac{(\bar{r}\pm\xi)^2}{4Fo}\right] d\xi + \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) \exp\left[-\frac{(2\pm\bar{r}-\xi)^2}{4Fo}\right] d\xi \right\} - \frac{(Bi-1)}{\bar{r}} \exp\left[(Bi-1)^2 Fo\right] \times \int_0^1 \xi \theta_0(\xi) \exp\left[(Bi-1)(2\mp\bar{r}-\xi)\right] \operatorname{erfc}\left[-\frac{2\mp\bar{r}-\xi}{2\sqrt{Fo}} + (Bi-1)\sqrt{Fo}\right] d\xi; \quad (48)$$

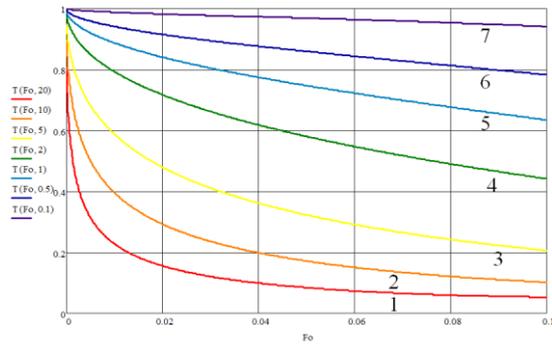


Рис. 3. Изменение безразмерных температур поверхности сферы в зависимости от чисел Био и Фурье при Bi: 1) 20; 2) 10; 3) 5; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,1
Fig. 3. Change of dimensionless temperatures of the surface of a sphere depending on the Biot and Fourier numbers at Bi: 1) 20; 2) 10; 3) 5; 4) 2; 5) 1; 6) 0,5; 7) 0,1

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Как уже отмечалось выше, решения задач теплопроводности и диффузии для тел, в том числе канонической формы, получают в форме рядов Фурье [2,3,5,6,8-10], что характерно для условий с неравномерным начальным распределением потенциалов переноса теплоты и массы вещества, но решений для малых значений чисел Фурье в источниках не приводится. Вместе с тем, чем меньше время процесса, тем меньше числовые значения критериев Фурье и тем самым больше членов бесконечного ряда, что влечет за собой нарастание ошибки при вычислении.

В работе приведены решения для тел канонической формы - пластины, цилиндра и сферы, также представлены номограммы безразмерной температуры поверхности тела в зависимости от значений чисел Био и Фурье при конкретных значениях числа Bi.

Номограммы позволяют с помощью простых геометрических операций (например, прикладывания линейки) исследовать функциональные зависимости температуры на поверхности тел канонической формы в зависимости от значений чисел Био и Фурье без громоздких вычислений при малых значениях числа Фурье, что способствует исключению ошибок при реализации методов расчета с использованием «зонального» метода [5] и метода «микропроцессов» [4].



ЛИТЕРАТУРА

1. **Федосов С.В., Баканов М.О.** Применение метода «микрпроцессов» для моделирования процессов теплопроводности и диффузии в телах канонической формы. Изв. вузов. Химия и химическая технология. 2020. Т. 63. Вып. 10. С. 90-95.
2. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967. 600 с.
3. **Лыков А.В., Михайлов Ю.А.** Теория тепло- и массопереноса. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1963. 535 с.
4. **Федосов С.В.** Тепломассоперенос в технологических процессах строительной индустрии. Иваново: ИПК «ПресСто». 2010. 363 с.
5. **Рудобахта С.П., Карташов Э.М.** Диффузия в химико-технологических процессах. М.: КолосС. 2013. 478 с.
6. **Шамин Р.В.** Концентрированный курс высшей математики. М.: URSS. 2017. 398 с.
7. **Мамонтов А.Е.** Методы математической физики: учебное пособие. Новосибирск: НГПУ. 2016. 129 с.
8. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS. 2018. 1080 с.
9. **Гаврилов В.С., Денисова Н.А., Калинин А.В.** Функции Бесселя в задачах математической физики. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета. 2014. 40 с.
10. **Кафтанова Ю.В.** Специальные функции математической физики. Харьков: Изд-во «Новое слово». 2009. 596 с.

Поступила в редакцию 16.06.2021

Принята к опубликованию 21.06.2021

Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosuniversiteta. 2014. 40 p. (in Russian).

10. **Kaftanova Yu.V.** *Special functions of mathematical physics. Popular science edition. Khar'kov.: Izdatel'stvo «Novoe slovo». 2009. 596 p. (in Russian).*

Received 16.06.2021

Accepted 21.06.2021

REFERENCES

1. **Fedosov S.V., Bakanov M.O.** Application of the "microprocess" method for modeling the processes of heat conduction and diffusion in bodies of canonical shape. *Izv. vuzov. Himiya i himicheskaya tekhnologiya*. 2020. V. 63. N. 10. P. 90-95 (in Russian).
2. **Lykov A.V.** Heat transfer theory. M.: Vysshaya shkola. 1967. 600 p. (in Russian).
3. **Lykov A.V., Mihajlov Yu.A.** Heat and mass transfer theory. M.-L.: Gosenergoizdat. 1963. 535 p. (in Russian).
4. **Fedosov S.V.** Heat and mass transfer in the technological processes of the construction industry. Ivanovo: IPK «PresSto». 2010. 363 p. (in Russian).
5. **Rudobashta S.P., Kartashov E.M.** Diffusion in chemical engineering processes. M.: KolosS. 2013. 478 p.
6. **Shamin R.V.** Concentrated course of higher mathematics. M.: URSS. 2017. 398 p. (in Russian).
7. **Mamontov A.E.** Methods of Mathematical Physics. Novosibirsk: NGPU. 2016. 129 p. (in Russian).
8. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications. M.: URSS. 2018. 1080 p. (in Russian).
9. **Gavrilov V.S., Denisova N.A., Kalinin A.V.** Bessel functions in problems of mathematical physics. Nizhnij Novgorod: